Übersicht Polynome

Ein Polynom (n-ten Grades) ist eine Funktion der Form:

$$\mathbf{y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0},$$

wobei die $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ relle Zahlen sind.

Jedes Polynom n-ten Grades hat genau **n** Nullstellen, wovon nicht alle reelle Zahlen sein müssen. Sie können auch komplex (imaginär) sein.

Hat ein Polynom n-ten Grades **n** reelle Nullstellen $\mathbf{x_{N1}, x_{N2}, ..., x_{Nn}}$ so läßt es sich wie folgt darstellen (Linearfaktorzerlegung):

$$\mathbf{y = f(x) = a(x - x_{N1})(x - x_{N2})(x - x_{N3})...... (x - x_{Nn})}$$

Sind weniger als **n** reelle Nullstellen bekannt, etwa **k**, so läßt sich eine Zerlegung finden:

$$\mathbf{y = f(x) = a(x - x_{N1})(x - x_{N2})...(x - x_{Nk})g(x)}$$

wobei g(x) ein Polynom (n-k)-ten Grades ist. Diese Zerlegung findet man durch Polynomdivision.

Ist f ein Polynom mit $\mathbf{y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$, und sind alle $\mathbf{a_i}$ ganzzahlig und $\mathbf{a_0} \neq 0$, so sind die ganzzahligen Nullstellen von f stets Teiler von $\mathbf{a_0}$.

Um eine Linearfaktorzerlegung zu finden, muß ich praktisch die Nullstellen kennen. Sie zu berechnen ist einfach für Polynome ersten und zweiten Grades (direkt berechnen oder p/q-Formel). Es ist prinzipiell möglich für Polynome dritten und vierten Grades, wenn auch schwierig. Es gibt kein allgemeines Verfahren für Polynome fünften und höheren Grades.

In zwei Spezialfällen wird es leichter, bzw überhaupt erst möglich, Nullstellen von sonst unzugänglichen Polynomen zu finden.

(1) Ich finde irgendwie eine Nullstelle $\mathbf{x_{N1}}$, z.B. durch Raten.
Dann läßt sich das Polynom ohne Rest durch den Linearfaktor $\mathbf{(x - x_{N1})}$, der dieser Nullstelle entspricht, teilen (Polynomdivision). Das resultierende Polynom hat einen Grad weniger und läßt sich vielleicht leichter lösen.

(2) Ich finde eine Substitution (Ersetzung), die mir das Polynom auf ein Polynom kleineren Grades zurückführt. Beispiel:

$$\mathbf{y = f(x) = 2x^6 - 3x^3 + 1}$$

Hier liefert mir die Substitution (Ersetzung)

$$\mathbf{x^3 = z}$$

in der Bestimmungsgleichung $\mathbf{0 = 2x^6 - 3x^3 + 1}$ die equivalente Formel

$$\mathbf{0 = 2z^2 - 3z + 1}$$

die ich nach der p/q-Formel lösen kann. Ziehen der Kubikwurzel aus den Lösungen $\mathbf{z_{1/2}}$ gibt mir dann die Nullstellen der ursprünglichen Gleichung.