Kurvendiskussion II Kurzfassung

Wir betrachten Polynome $\mathbf{y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$
Das Kriterium für Nullstellen (Schnittstellen mit der x-Achse) ist

$$\mathbf{y = f(x) = 0}$$

Hat das Polynom **n** reelle Nullstellen $\mathbf{x_{N1}, x_{N2}, \ldots, x_{Nn}}$ so läßt es sich wie folgt darstellen (Linearfaktorzerlegung):

$$\mathbf{y = f(x) = a_n(x - x_{N1})(x - x_{N2})(x - x_{N3}) \ldots\ldots (x - x_{Nn})}$$

Es gibt einfache und mehrfache Nullstellen.

Je nachdem, wie oft eine Nullstelle in der Linearfaktorzerlegung auftaucht, haben wir

- Nullstellen mit ungeradem Grad (einfache, dreifache, fünffache... Nullstellen) oder
- Nullstellen mit geradem Grad (zweifache, vierfache, sechsfache,... Nullstellen)

- Bei Nullstellen mit ungeradem Grad schneidet die Funktion die x-Achse
  (Das Vorzeichen der Funktionswerte wechselt)
- Bei Nullstellen mit geradem Grad berührt die Funktion die x-Achse
  (Das Vorzeichen der Funktionswerte bleibt gleich)

Die Ableitungsfunktion **y' = f '(x)** beschreibt die Steigung der Tangenten für die Ausgangsfunktion f(x).
Extremwerte der Funktion f(x) sind Nullstellen der Ableitung. Kriterium :

$$\mathbf{y' = f'(x) = 0}$$

Nicht jede Nullstelle der Ableitung ist Extremwert.

- Nullstellen von f '(x) mit ungeradem Grad sind Extremwerte der Funktion f(x)
- Nullstellen von f '(x) mit geradem Grad sind **keine** Extremwerte der Funktion f(x)

- In Intervallen, in denen f '(x) positiv ist, steigt f(x) monoton.
- In Intervallen, in denen f '(x) negativ ist, fällt f(x) monoton.

Die zweite Ableitung y'' = f ''(x) beschreibt das Krümmungsverhalten der Ausgangsfunktion f(x).
Wendepunkte der Funktion f(x) sind Nullstellen der zweiten Ableitung f ''(x). Kriterium :

$$\mathbf{y'' = f''(x) = 0}$$

Nicht jede Nullstelle der zweiten Ableitung ist Wendepunkt.

- Nullstellen von f ''(x) mit ungeradem Grad sind Wendepunkte der Funktion f(x)
- Nullstellen von f ''(x) mit geradem Grad sind **keine** Wendepunkte der Funktion f(x)

- In Intervallen, in denen f ''(x) positiv ist, ist f(x) linksgekrümmt.
- In Intervallen, in denen f ''(x) negativ ist, ist f(x) rechtsgekrümmt.