Kurvendiskussion II

Zur Beschreibung von Funktionen/Kurven sind folgende Kriterien wichtig:

(a) Definitions-/Wertebereich
(b) Schnittstellen mit den Achsen
(c) Symmetrie
(d) Verlauf im Großen
(e) Minima/Maxima (= lokale Extremwerte, Hoch-/Tiefpunkte)
(f) Wendepunkte und Krümmung
(g) Intervalle von Monotonie

Im ersten Teil der Kurvendiskussion haben wir einige Grundtatsachen zusammengestellt, die im folgenden vertieft werden.

Im Folgenden werden zu einigen Punkten weitere Kriterien genannt.
Ziel ist die Beschreibung von Polynomen höchstens vierten Grades.

$$\mathbf{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$$

Weiterführende Hinweise auf andere Arten von Funktionen werden mit ⏭ gekennzeichnet und können notfalls überlesen werden.

(a) Definitions-/Wertebereich

Der *Wertebereich* (der Output) für Polynome 3. Grades ist immer $\mathbb{R}$.
Der *Wertebereich* (der Output) für Polynome 4. Grades ist immer ein echter Teil von $\mathbb{R}$.

Wenn $\mathbf{y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$ ist,
so gilt:

falls $a > 0$, dann gibt es ein kleinstes Minimum y_{MIN}. Alle anderen Funktionswerte liegen höher und der Wertebereich ist das Intervall $[y_{MIN}, \infty[$

falls $a < 0$, dann gibt es ein größtes Maximum y_{MAX}. Alle anderen Funktionswerte liegen tiefer und der Wertebereich ist das Intervall, $]-\infty; y_{MAX}]$

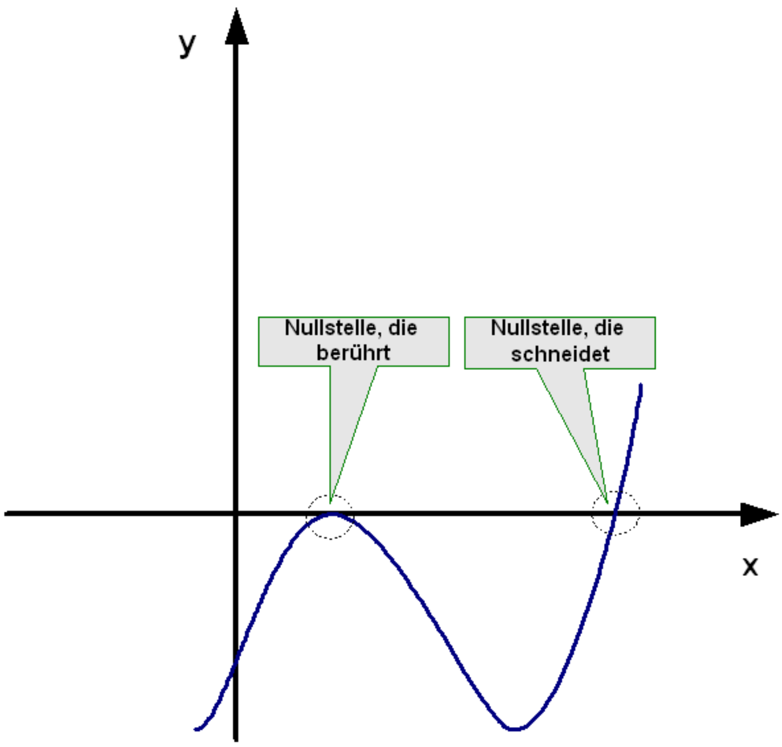
Machen Sie sich das an der allgemeinen Parabel $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ klar, die prinzipiell den gleichen Fall darstellt. Dort liegen alle Funktionswerte entweder über oder unter dem Scheitelpunkt, je nachdem welches Vorzeichen der Faktor “a” hat.

⏭ Alle Polynome, deren höchster Exponent.**ungerade** ist, haben ganz $\mathbb{R}$ als Wertebereich. Die Polynome, deren höchster Exponent **gerade** ist, haben einen eingeschränkten Wertebereich.

(b) Schnittstellen mit den Achsen

Nullstellen (= Schnittstelle mit x-Achse)

Es gibt zwei Arten von Nullstellen:
- Nullstellen, bei denen die Funktion die x-Achse schneidet
- Nullstellen, bei denen die Funktion die x- Achse nur berührt, ohne sie zu schneiden.



- Bei Nullstellen, wo die Funktion schneidet, haben die Funktionswerte rechts und links der Nullstelle verschiedene Vorzeichen. Wir sagen: **Das Vorzeichen wechselt**.
- Bei Nullstellen, wo die Funktion berührt, haben die Funktionswerte rechts und links der Nullstelle identische Vorzeichen.

Um zwischen den beiden Arten zu unterscheiden, müssen wir uns die Linearfaktorzerlegung des Polynoms ansehen.

In der Linearfaktorzerlegung können Nullstellen einmal oder mehrfach auftreten.
Wir unterscheiden zwischen **einfachen** und **mehrfachen** Nullstellen.

Eine (mehrfache) Nullstelle kann 2, 3, 4, ...-mal auftreten.
Wir sprechen von zweifachen, dreifachen, vierfachen... Nullstellen.
Alternativ reden wir von Nullstellen zweiten, dritten, vierten,... Grades.

⏭ Wenn wir uns nicht festlegen wollen, und es allgemein formulieren, so sprechen wir von n-fachen Nullstellen, bzw von Nullstellen n-ten Grades.

Beispiele:

$y = (x - 1)(x - 2)$	zwei einfache Nullstellen
$y = (x - 1)^2 (x - 2)$	eine zweifache, eine einfache Nullstelle
$y = (x + 1)(x - 1)^3 (x - 2)$	zwei einfache, eine dreifache Nullstelle
$y = (x + 1)(x - 1)^4 (x - 2)^2 (x - 3)$	zwei einfache, eine vierfache, eine zweifache Nullstelle

Zusammenhang zwischen dem Grad der Nullstelle und der Frage, ob sie die x-Achse schneidet oder berührt:
Bei einfachen, dreifachen, fünffachen,... Nullstellen schneidet die Funktion die x-Achse.
Bei zweifachen, vierfachen, sechsfachen,... Nullstellen berührt die Funktion die x-Achse.

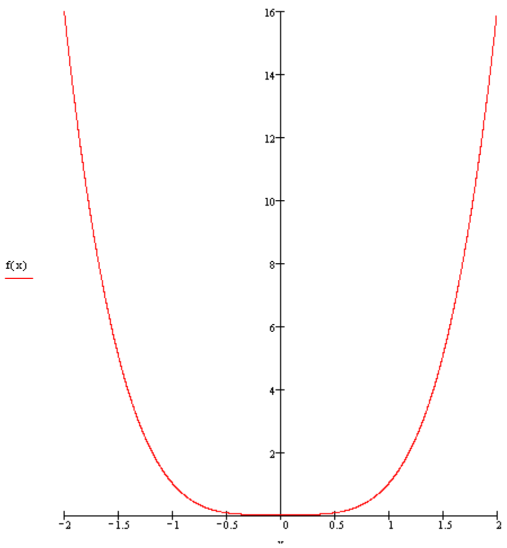
oder

Bei Nullstellen mit **ungeradem Grad schneidet** die Funktion die x-Achse.
Bei Nullstellen mit **geradem Grad berührt** die Funktion die x-Achse.

Jede Nullstellen mit geradem Grad (jede zweifache, vierfache,... Nullstelle) ist gleichzeitig Extremwert!

(e) Minima/Maxima (= lokale Extremwerte, Hoch-/Tiefpunkte)

Die Kriterien, die wir bislang zur Extremwertbestimmung benutzt haben, reichen im Allgemeinen nicht aus.
Bestes Gegenbeispiel ist die Funktion $\mathbf{y = x^4}$



Wenn wir von dieser Funktion erste und zweite Ableitung berechnen, erhalten wir:

$y' = 4x^3$
$y'' = 12x^2$

Wenn wir unser bisheriges Wissen zurückgreifen, müßte bei 0 ein Wendepunkt liegen. Der Augenschein überzeugt uns, daß das nicht so ist, sondern daß dort ein Extremwert liegt
Also müssen wir uns die Kriterien für Extremwerte noch einmal genauer anschauen.

Wir erinnern uns:

Für alle Funktionen gilt folgendes Monotonie-Kriterium**:**

Die Funktion y = f(x) ist im Intervall [a, b] monoton steigend genau dann, wenn

$$f'(x_0) \geqq 0$$

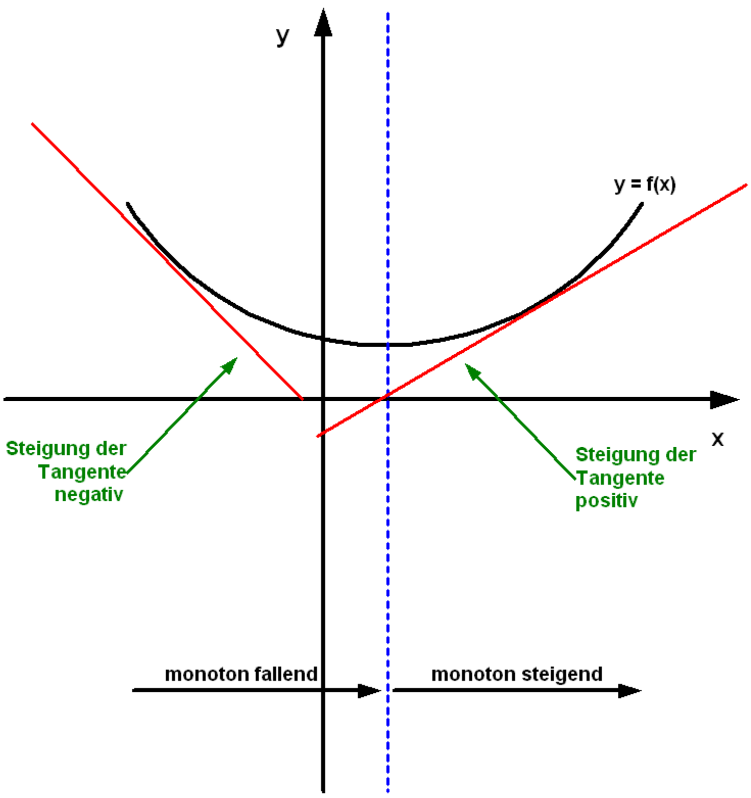
für alle $a \leqq x_0 \leqq b$

Die Funktion y = f(x) ist im Intervall [a, b] monoton fallend genau dann,

wenn

$$f'(x_0) \leqq 0$$

für alle $a \leqq x_0 \leqq b$



Dieses Wissen hilft uns, Extremwerte besser zu erkennen.
Bei einem Extremwert wechselt die Funktion von einem Intervall, in welchem sie fällt, zu einem, wo sie steigt (oder umgekehrt).

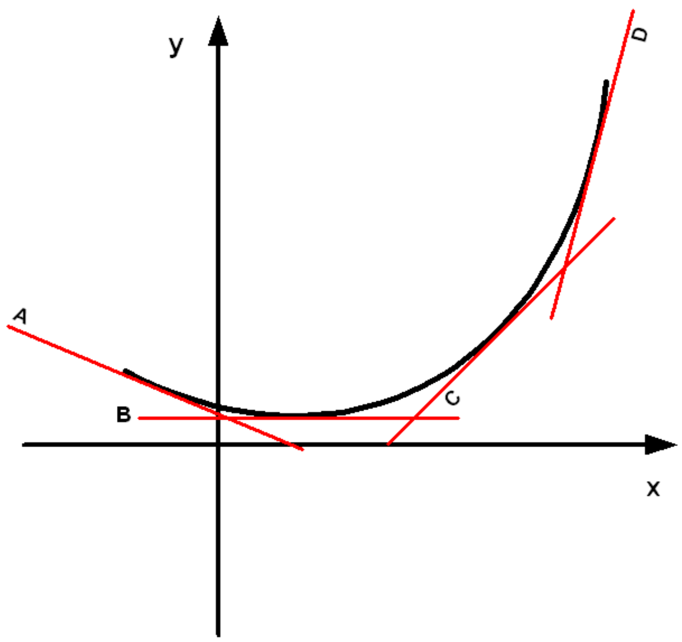
Das heißt: Die Tangentensteigungen wechseln das Vorzeichen.
Das heißt: Die Funktion, die die Tangentensteigungen beschreibt, also die erste Ableitung, hat eine Nullstelle, bei der sie die x-Achse schneidet.

Das heißt:
- An allen einfachen, dreifachen, fünffachen,... Nullstellen der ersten Ableitung $y' = f'(x)$ liegt ein Extremwert.
- An allen zweifachen, vierfachen, sechsfachen,... Nullstellen der ersten Ableitung $y' = f'(x)$ liegt **kein** Extremwert.

(f) Wendepunkte und Krümmung

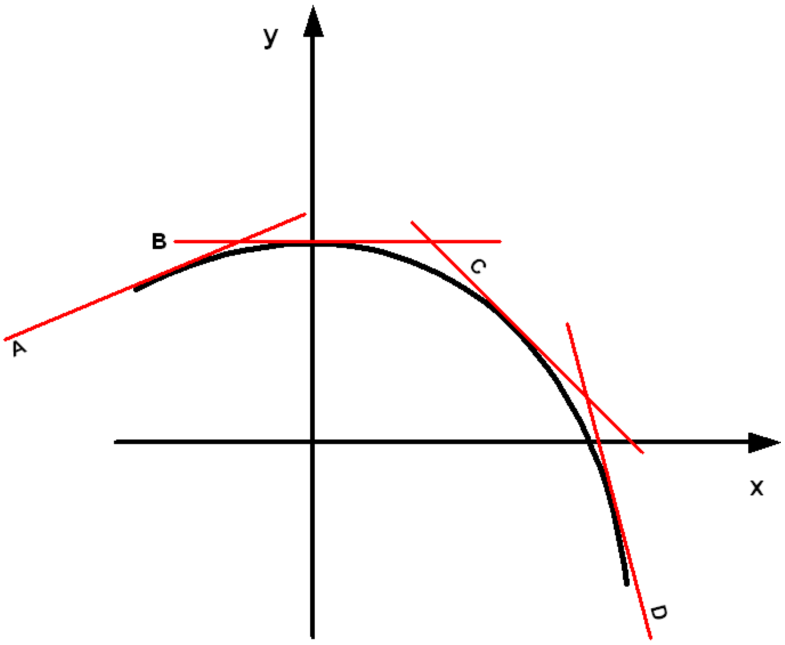
Wendepunkte sind Punkte, in denen die Funktion ihre Krümmung ändert (Rechtskrümmung/Linkskrümmung bzw. Rechtseinschlag/Linkseinschlag).

Zuerst klären wir die Begriffe Links- und Rechtskrümmung:



Oben haben wir eine in einem Intervall linksgekrümmte Kurve.
Betrachten wir die Tangentensteigungen bei **wachsendem x**, so sehen wir, daß auch die **Steigungen wachsen**. (Die Steigung der Tangente A ist negativ, die der Tangente B am Extremwert ist Null, die der Tangente C ist positiv und die Tangente D hat eine noch stärkere Steigung als C).

Analog ist es für rechtsgekrümmte Kurven.



Betrachten wir die Tangentensteigungen bei **wachsendem x**, so sehen wir, daß auch die **Steigungen sinken**. (Die Steigung der Tangente A ist positiv, die der Tangente B am Extremwert ist Null, die der Tangente C ist negativ und die Tangente D fällt noch stärker als C).

Das gibt uns unsere Kriterien für Krümmungen:

- Wenn die Tangentensteigungen in einem Intervall monoton steigen, haben wir in diesem Intervall eine Linkskrümmung.
- Wenn die Tangentensteigungen in einem Intervall monoton fallen, so haben wir in diesem Intervall eine Rechtskrümmung.

Die Steigungsfunktion war aber die erste Ableitung f '(x) zur gegebenen Funktion f(x). Wir können das Kriterium also auch formulieren durch:

Wenn zu einer Funktion f(x) die Ableitung f '(x) in einem Intervall monoton steigt, hat f(x) in diesem Intervall eine Linkskrümmung.
Wenn zu einer Funktion f(x) die Ableitung f '(x) in einem Intervall monoton fällt, hat f(x) in diesem Intervall eine Rechtskrümmung

Wenn wir jetzt das Steigen und Fallen der Ableitung f '(x) mit unserem allgemeinen Monotoniekriterium verbinden, so erhalten wir unsere Regel.

Regel:

Die Funktion y = f(x) ist im Intervall [a, b] linksgekrümmt genau dann, wenn

$f''(x_0) \geqq 0$

für alle $a \leqq x_0 \leqq b$

Die Funktion y = f(x) ist im Intervall [a, b] rechtsgekrümmt genau dann, wenn

$f''(x_0) \leqq 0$

für alle $a \leqq x_0 \leqq b$

Dieses Wissen hilft uns, Wendepunkte besser zu erkennen.
Bei einem Wendepunkt wechselt die Funktion von einem Intervall mit Linkskrümmung zu einem Intervall mit Rechtskrümmung (oder umgekehrt).

Das heißt: Die zweite Ableitung $f''(x)$ wechselt das Vorzeichen.
Das heißt: Die zweite Ableitung $f''(x)$ hat eine Nullstelle, bei der sie die x-Achse schneidet.

Das heißt:

- An allen einfachen, dreifachen, fünffachen,... Nullstellen der zweiten Ableitung $y'' = f''(x)$ liegt ein Wendepunkt.
- An allen zweifachen, vierfachen, sechsfachen,... Nullstellen der zweiten Ableitung $y'' = f''(x)$ liegt **kein** Wendepunkt.