Kurvendiskussion

Zur Beschreibung von Funktionen/Kurven sind folgende Kriterien wichtig:

(a) Definitions-/Wertebereich
(b) Schnittstellen mit den Achsen
(c) Symmetrie
(d) Verlauf im Großen
(e) Minima/Maxima (= lokale Extremwerte, Hoch-/Tiefpunkte)
(f) Wendepunkte
(g) Intervalle von Monotonie

Im Folgenden werden zu jedem Punkt Kriterien genannt.
Ziel ist die Beschreibung von Polynomen höchstens vierten Grades.

$$\mathbf{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$$

Weiterführende Hinweise auf andere Arten von Funktionen werden mit ⏭ gekennzeichnet und können notfalls überlesen werden.

(a) Definitions-/Wertebereich

Der *Definitionsbereich* (der Input) ist der Bereich der für x erlaubten Werte.
Für Polynome ist das immer $\mathbb{R}$.

> ⏭ Die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x}$ hat einen kleineren Definitionsbereich, weil x nicht Null sein darf.

Der *Wertebereich* (der Output) sind die Zahlen, die f(x) annimmt.

Beispiel: $y = x^2$ nimmt nur positive Werte an, die Funktion ist nie negativ, der Wertebereich ist also das Intervall $[0, \infty[$

$y = x^3$ nimmt jeden beliebigen Wert an, der Wertebereich ist also $\mathbb{R}$.

Hinweis: Es ist nie falsch, höchstens unpräzise, zu sagen, daß ein Wertebereich $\mathbb{R}$ist.

(b) Schnittstellen mit den Achsen

Schnittstelle mit y-Achse

Gegeben:	Eine Funktion y = f(x)
Gesucht:	Ihre Schnittstelle mit der y-Achse
Ansatz :	**y = f(0)**
Zu tun :	Den Wert 0 in die Funktion einsetzen und sehen, was rauskommt.

Nullstellen (= Schnittstelle mit x-Achse)

Gegeben:	Eine Funktion $y = f(x)$
Gesucht:	Ihre Schnittstelle(n) mit der x-Achse
Ansatz :	$\mathbf{0 = f(x)}$
Zu tun :	

Parabel	Gerade
Ansatz: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ • durch a teilen, wenn nötig ($a \neq 1$) • p/q-Formel anwenden • man erhält x_1 & x_2	**Ansatz:** $\mathbf{mx + n = 0}$ nach x auflösen

Polynom 3. Grades	Polynom 4. Grades
Ansatz: $\mathbf{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$ • eine Nullstelle irgendwie finden • Polynomdivision • Weiter wie bei der Parabel • man erhält x_1 & x_2 & x_3	**Ansatz:** $\mathbf{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0}$ • eine Nullstelle irgendwie finden • Polynomdivision und weiter wie beim dritten Grad • Falls die Gleichung die Form $\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0}$ hat: Substitution $\mathbf{x^2 = z}$ und weiter wie bei der Parabel • man erhält x_1 & x_2 & x_3 & x_4

(c) Symmetrie

Es gibt zwei Arten Symmetrie: Spiegelsymmetrie und Punktsymmetrie.

Ein Polynom ist spiegelsymmetrisch, wenn **alle** Exponenten **gerade** sind.
Ein Polynom ist punktsymmetrisch, wenn **alle** Exponenten **ungerade** sind.
Ein Exponent “0” zählt als gerade.

Ein Polynom muß nicht symmetrisch sein.

Beispiele:

$y = f(x) = 3x$	Punktsymmetrisch
$y = f(x) = 3x^2 - 4$	Spiegelsymmetrisch ($4 = 4x^0$!)
$y = f(x) = 3x^3 - 4x$	Punktsymmetrisch
$y = f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 2$	Spiegelsymmetrisch
$y = f(x) = 3x - 1$	Keine Symmetrie
$y = f(x) = 3x^2 - 4x + 1$	Keine Symmetrie
$y = f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2$	Keine Symmetrie
$y = f(x) = 3x^4 - 4x + 2$	Keine Symmetrie

⏭ Die allgemeinen Kriterien für Symmetrie sind:
Spiegelsymmetrie : $f(-x) = f(x)$
Punktsymmetrie: $f(-x) = - f(x)$

Hinweis: Spiegelsymmetrie wird auch *Achsensymmetrie* genannt

(d) Verlauf im Großen

Damit ist die Frage gemeint, was mit den Funktionswerten passiert, wenn die x-Werte gegen Unendlich oder gegen Minus-Unendlich gehen, d. h. es ist nach den Grenzwerten

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ gefragt.

Für Polynome existieren diese Grenzwerte immer.
Sie sind dann entweder + ∞ oder - ∞. (Wenn die Funktion nicht konstant ist)
Welcher Wert angenommen wird, hängt ab von

1. dem höchsten Exponenten des Polynoms
2. dem Koeffizienten vor diesem höchsten Exponenten

$y = f(x) =$ $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$	$(n>0)$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
n gerade	$a_n > 0$	+ ∞	+ ∞
n gerade	$a_n < 0$	- ∞	- ∞
n ungerade	$a_n > 0$	+ ∞	- ∞
n ungerade	$a_n < 0$	- ∞	+ ∞

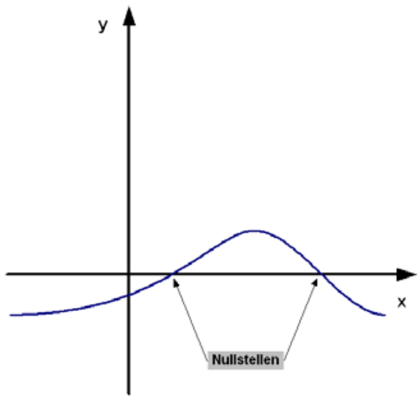
⏭ Für andere Funktionen brauchen diese Grenzwerte garnicht zu existieren
Beispiel: $y = \sin(x)$
oder sie können gegen eine feste reelle Zahl gehen
Beispiel: $y = 1/x$

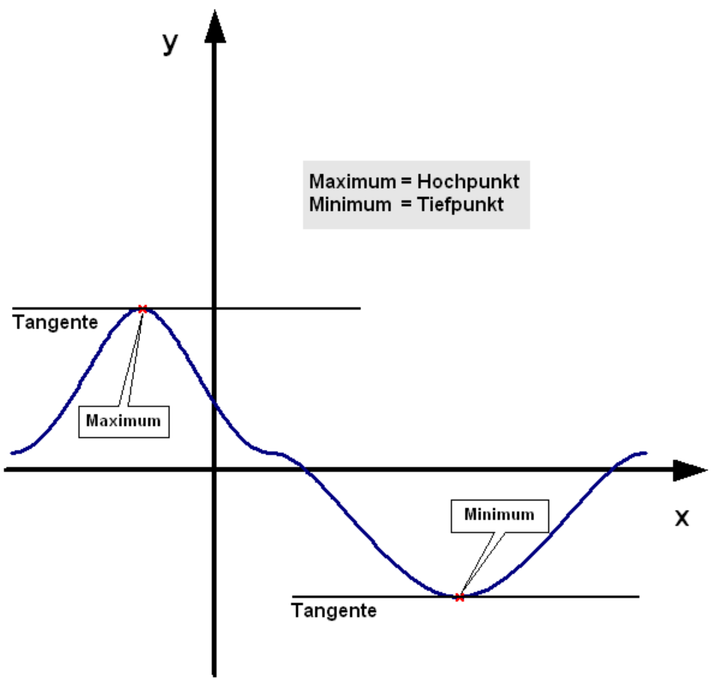
(e) Minima/Maxima (= lokale Extremwerte, Hoch-/Tiefpunkte)

Minima und Maxima sind Punkte, in denen die Funktionswerte der Funktion höher bzw. tiefer liegen als alle Punkte in beliebig kleiner Umgebung.

Ohne die Ableitung einer Funktion zu betrachten kann man nur ganz allgemeine Aussagen über Extremwerte machen.
So muß zwischen zwei benachbarten verschiedenen Nullstellen mindestens ein Extremwert liegen. Ob es ein Maximum oder Minimum ist, sieht man dann aus dem Verlauf der Kurve.

Für genauere Aussagen betrachten wir die Ableitung, also die Funktion der Tangentensteigungen.





An Extremwerten haben die Tangenten die Steigung Null (= 0).
Ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eine Minimums oder Maximums an der Stelle x_0 ist also

$f'(x_0) = 0$

Das reicht aber noch nicht aus.

(Gegenbeispiel: $y = f(x) = x^3$. Für $x_0 = 0$ gilt

$f'(x_0) = 3x_0^2 = 3*0 = 0$

Die Kurve hat dort aber keinen Extremwert)

Für bessere Aussagen brauchen wir die zweite Ableitung $f''(x)$.
Das ist die Ableitung der Ableitung.

Beispiel: $y = f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 3*2\,x = 6x$

Für Polynome zweiten (Parabeln) & dritten Grades gibt es folgende zusätzlichen Kriterien:

- **Die Funktion $y = f(x)$ hat in x_0 ein Minimum, wenn**
  $f'(x_0) = 0$ und
  $f''(x_0) > 0$

- **Die Funktion $y = f(x)$ hat in x_0 ein Maximum, wenn**
  $f'(x_0) = 0$ und
  $f''(x_0) < 0$

- **Die Funktion $y = f(x)$ hat in x_0 einen Wendepunkt (s.u.), wenn**
  $f''(x_0) = 0$

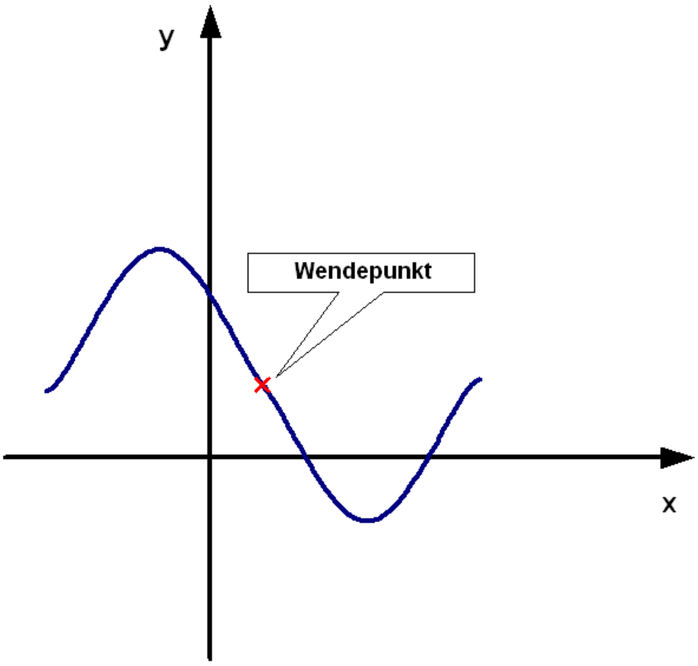
⏭ Diese Kriterien kann man nicht einfach für andere Funktionen übernehmen.

Hat man die x-Koordinate eines Extremwertes bestimmt, muß auch noch die y-Koordinate berechnet werden, durch Einsetzen in die Funktionsgleichung $y = f(x)$.

(f) Wendepunkte

Wendepunkte sind Punkte, in denen die Funktion ihre Krümmung ändert (Rechtskrümmung/Linkskrümmung bzw. Rechtseinschlag/Linkseinschlag).

Ohne die Ableitungen einer Funktion zu betrachten kann man nur ganz allgemeine Aussagen über Wendepunkte machen.
So muß zwischen zwei benachbarten verschiedenen Extremwerten ein Wendepunkt liegen.



Für bessere Aussagen brauchen wir die zweite Ableitung f ''(x).
Das ist die Ableitung der Ableitung.

Beispiel: $y = f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f''(x) = 3*2\,x = 6x$

Für Polynome zweiten (Parabeln) & dritten Grades gibt es folgendes Kriterium(s.o.):

- **Die Funktion y = f(x) hat in x_0 einen Wendepunkt, wenn**
  $f''(x_0) = 0$

⏭ Diese Kriterien kann man nicht einfach für andere Funktionen übernehmen

Hat man die x-Koordinate eines Wendepunktes bestimmt, muß noch die y-Koordinate berechnet werden, durch Einsetzen in die Funktionsgleichung y = f(x).

(g) Intervalle von Monotonie

Das sind Intervalle, in denen die Funktion monoton steigt oder fällt.

Ohne die Ableitungen einer Funktion zu betrachten kann man nur ganz allgemeine Aussagen über Monotonie-Intervalle machen.
So muß vor einem Maximum die Funktion monoton steigen und danach monoton fallen.
Vor einem Minimum muß die Funktion monoton fallen und danach steigen.
Auch der Verlauf im Großen enthält teilt uns etwas über Monotonie mit.

Für genauere Aussagen betrachten wir die Ableitung, also die Funktion der Tangentensteigungen.

Für alle Funktionen gilt folgendes Monotonie-Kriterium:

- **Die Funktion $y = f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ monoton steigend genau dann, wenn**
  $f'(x_0) \geqq 0$
  für alle $a \leqq x_0 \leqq b$

  Die Funktion $y = f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ streng monoton steigend genau dann, wenn
  $f'(x_0) > 0$
  für alle $a \leqq x_0 \leqq b$

- **Die Funktion $y = f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ monoton fallend genau dann, wenn**
  $f'(x_0) \leqq 0$
  für alle $a \leqq x_0 \leqq b$

  Die Funktion $y = f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ streng monoton fallend genau dann, wenn
  $f'(x_0) < 0$
  für alle $a \leqq x_0 \leqq b$