Hausaufgaben 15.10.2008 HW1A

Lösungen:

1	Im Allgemeinen ist die Ableitung einer Funktion ungleich der Stammfunktion: $f(x) \neq f'(x)$ (Beispiel: $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$ und $x^2 \neq 2x$) Es gibt allerdings **eine** Funktion, für die gilt $f(x) = f'(x)$ a) Finden Sie heraus, welche Funktion das ist. $y = f(x) = e^x$ b) Zeichnen Sie diese Funktion. c) Suchen Sie nach Anwendungen in Natur oder Technik, in denen diese Funktion, oder ihr ähnliche, auftauchen. Finden Sie mindestens drei Anwendungsfälle.
2	Führen Sie vollständige Kurvendiskussionen für folgende Funktionen durch. Zeichnen Sie die Funktionen a) $f(x) = -1{,}2x^4 + 2{,}64x^3 + 2{,}88x^2 + 2{,}16x - 6{,}48$ L: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $y_s = -6{,}48$; $f(x) = -1{,}2(x - 1)(x - 3)(x^2 + 1{,}8x + 1{,}8)$ $f'(x) = -4{,}8x^3 + 7{,}92x^2 + 5{,}76x + 2{,}16$ $f''(x) = -14{,}4x^2 + 15{,}84x + 5{,}76$ P_{E1} (2,2669; 12,2812); Max. P_{W1} (-0,2882; -6,9348); Wendepunkt P_{W2} (1,3882; 4,6746); Wendepunkt Keine Symmetrie. Steigend für $(-\infty;\ 2{,}2669]$; Fallend für $(2{,}2669;\ \infty)$; Rechtsgekrümmt für $(-\infty;\ -0{,}2882]$; Linksgekrümmt für $(-0{,}2882;\ 1{,}3882]$; Rechtsgekrümmt für $(1{,}3882;\ \infty)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

b)
$f(x) = -2x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 10x + 12$
L:
$x_1 = -3$;
$x_2 = -2$;
$x_3 = -1$;
$x_4 = 1$;

$y_s = 12$;
$f(x) = -2(x + 3)(x + 2)(x + 1)(x - 1)$

$f'(x) = -8x^3 - 30x^2 - 20x + 10$
$f''(x) = -24x^2 - 60x - 20$

P_{E1} (-2,6073; 2,7655); Max.
P_{E2} (-1,4691; -1,8828); Min.
P_{E3} (0,3263; 13,8282); Max.

P_{W1} (-2,1039; 0,638); Wendepunkt
P_{W2} (-0,3961; 7,0423); Wendepunkt

Keine Symmetrie.
Steigend für (-∞; -2,6073];
Fallend für (-2,6073; -1,4691];
Steigend für (-1,4691; 0,3263];
Fallend für (0,3263; ∞);

Rechtsgekrümmt für (- ∞; -2,1039];
Linksgekrümmt für (-2,1039; -0,3961];
Rechtsgekrümmt für (-0,3961; ∞);

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

c)

$f(x) = \frac{1}{25}x^4 - \frac{4}{25}x^3 - \frac{22}{25}x^2 + 4x - 3$

L :

$x_1 = -5;$

$x_2 = 1;$

$x_3 = 3;$

$x_4 = 5;$

$y_s = -3;$

$f(x) = \frac{1}{25}(x+5)(x-1)(x-3)(x-5)$

$f'(x) = \frac{4}{25}x^3 - \frac{12}{25}x^2 - \frac{44}{25}x + 4$

$f''(x) = \frac{12}{25}x^2 - \frac{24}{25}x - \frac{44}{25}$

$P_{E1}(-3,1131;\ -15,3967);$ Min.

$P_{E2}(1,9112;\ 0,8472);$ Max.

$P_{E3}(4,2019;\ -1,1305);$ Min.

$P_{W1}(-1,1602;\ -8,503);$

$P_{W2}(3,1602;\ -0,2078);$

Keine Symmetrie.

Fallend für $(-\infty;\ -3,1131];$

Steigend für $(-3,1131;\ 1,9112];$

Fallend für $(1,9112;\ 4,2019];$

Steigend für $(4,2019;\ \infty);$

Linksgekrümmt für $(-\infty;\ -1,1602];$

Rechtsgekrümmt für $(-1,1602;\ 3,1602];$

Linksgekrümmt für $(3,1602;\ \infty);$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty;$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

	d) $f(x) = 3x^4 + \frac{147}{10}x^3 + \frac{144}{5}x^2 + 72x$ L : $x_1 = -4;$ $x_2 = 0;$ $y_s = 0;$ $f(x) = 3\,(x + 4)\,x\left(x^2 + \frac{9}{10}x + 6\right)$ $f'(x) = 12x^3 + \frac{441}{10}x^2 + \frac{288}{5}x + 72$ $f''(x) = 36x^2 + \frac{441}{5}x + \frac{288}{5}$ $P_{E1}(-2,7214;\ -114,3748);$ Min. Keine Wendepunkte Keine Symmetrie. Fallend für $(-\infty;\ -2,7214]$; Steigend für $(-2,7214;\ \infty)$; Linksgekrümmt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
3	Für Polynome gelten die folgenden Bedingungen. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen. Das Ergebnis kann auf vier Stellen gerundet sein. a) - Grad 4 - symmetrisch - geht durch den Punkt (-3; -0,2) - geht durch den Punkt (1,5; 0) - geht durch den Punkt (1; 2) L: f (-3) = -0,2 f (1,5) = 0 f (1) = 2 d = 0 b = 0 81a - 27b + 9c - 3d + e = -0,2 5,0625a + 3,375b + 2,25c + 1,5d + e = 0 a + b + c + d + e = 2 a = 0,1963 ; b = 0 ; c = -2,2379; d = 0 ; e = 4,0417 ; **$f(x) = 0,1963x^4 - 2,2379x^2 + 4,0417$**

b)
- Grad 4
  - geht durch den Punkt (0; 0)
  - geht durch den Punkt (-0,5; -1)
  - geht durch den Punkt (2; 0)
  - geht durch den Punkt (-1; -1)
  - geht durch den Punkt (1; 1)

L:
f (0) = 0
f (-0,5) = -1
f (2) = 0
f (-1) = -1
f (1) = 1

e = 0
0,0625a - 0,125b + 0,25c - 0,5d + e = -1
16a + 8b + 4c + 2d + e = 0
a - b + c - d + e = -1
a + b + c + d + e = 1

a = 0,4 ; b = -1,1333; c = -0,4 ; d = 2,1333; e = 0 ;

f (x) = $0,4x^4$ - $1,1333x^3$ - $0,4x^2$ + 2,1333x

c)
- Grad 5
- symmetrisch
- geht durch den Punkt (-3; -2)
- geht durch den Punkt (1; -0,8)
- geht durch den Punkt (-4; 2)

L:
f (-3) = -2
f (1) = -0,8
f (-4) = 2

f = 0
d = 0
b = 0
- 243a + 81b - 27c + 9d - 3e + f = -2
a + b + c + d + e + f = -0,8
- 1024a + 256b - 64c + 16d - 4e + f = 2

a = -0,0233; b = 0 ; c = 0,4167 ; d = 0 ; e = -1,1933; f = 0 ;

f (x) = $-0,0233x^5$ + $0,4167x^3$ - 1,1933x

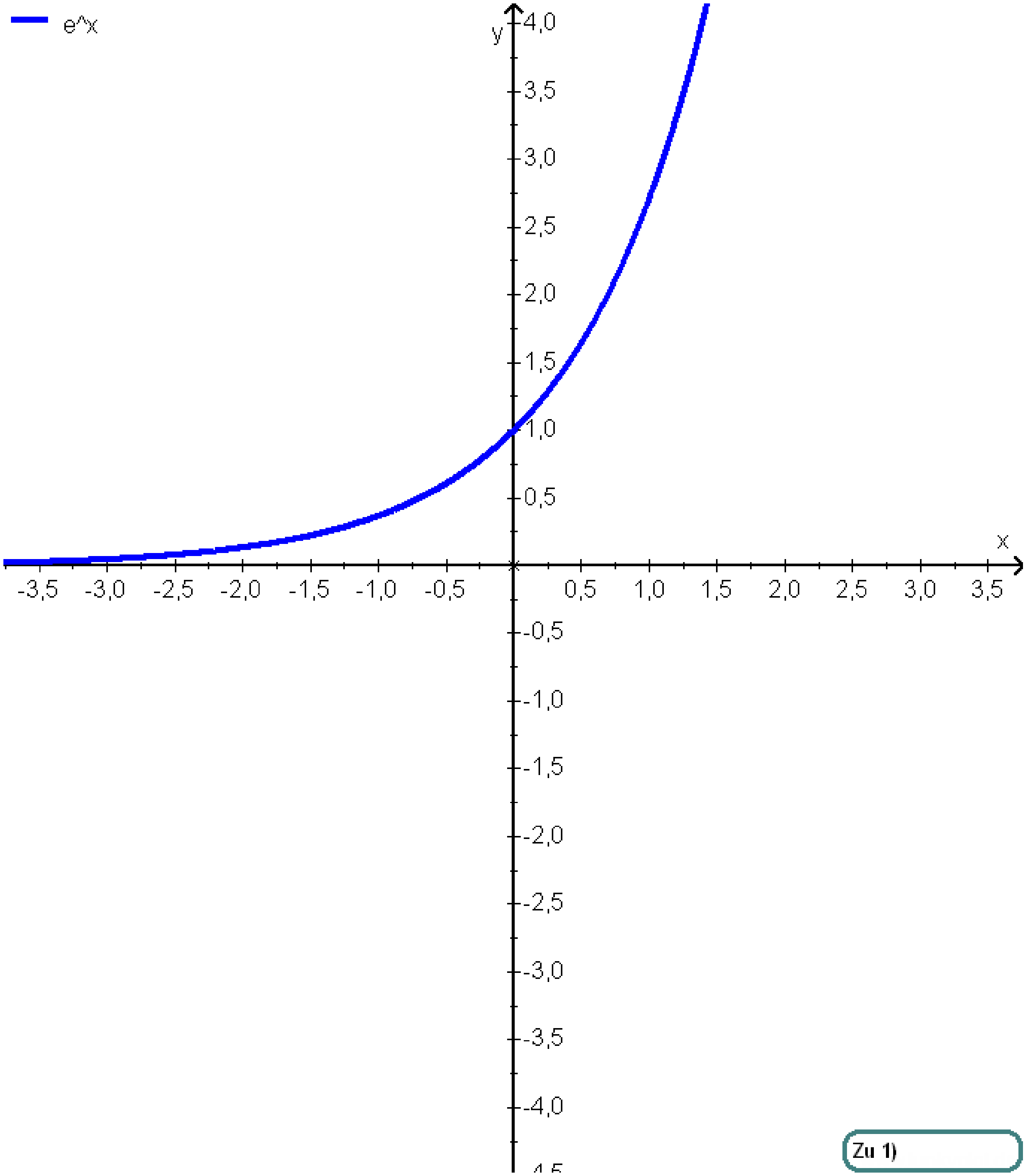
d)
- Grad 6
  - symmetrisch
  - geht durch den Punkt (-4; 0,2)
  - geht durch den Punkt (0; 0,6)
  - geht durch den Punkt (0,8; 1)
  - geht durch den Punkt (-0,5; 1)

L:
$f(-4) = 0{,}2$
$f(0) = 0{,}6$
$f(0{,}8) = 1$
$f(-0{,}5) = 1$

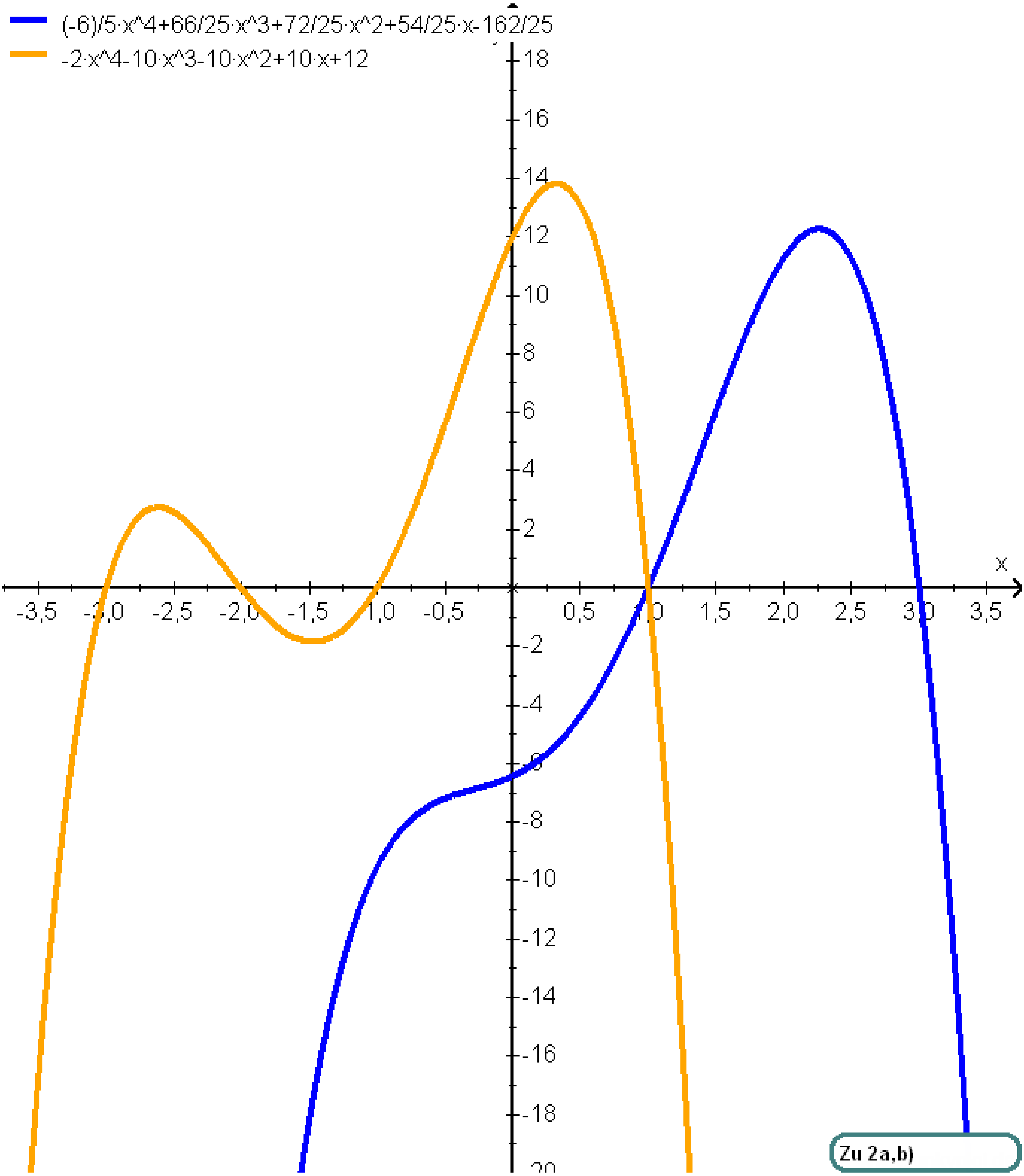
$f = 0$
$d = 0$
$b = 0$
$4096a - 1024b + 256c - 64d + 16e - 4f + g = 0{,}2$
$g = 0{,}6$
$0{,}262144a + 0{,}32768b + 0{,}4096c + 0{,}512d + 0{,}64e + 0{,}8f + g = 1$
$0{,}015625a - 0{,}03125b + 0{,}0625c - 0{,}125d + 0{,}25e - 0{,}5f + g = 1$

$a = 0{,}1560$; $b = 0$; $c = -2{,}6389$; $d = 0$; $e = 2{,}2499$; $f = 0$; $g = 0{,}6$;
$f(x) = 0{,}1560x^6 - 2{,}6389x^4 + 2{,}2499x^2 + 0{,}6$

Zu 1)


e^x
y
x
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
-0,5
-1,0
-1,5
-2,0
-2,5
-3,0
-3,5
-4,0
-3,5 -3,0 -2,5 -2,0 -1,5 -1,0 -0,5 0,5 1,0 1,5 2,0 2,5 3,0 3,5
Zu 1)

Zu 2a,b)


(-6)/5·x^4+66/25·x^3+72/25·x^2+54/25·x-162/25
-2·x^4-10·x^3-10·x^2+10·x+12
x
-3,5
-3,0
-2,5
-2,0
-1,5
-1,0
-0,5
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
18
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
Zu 2a,b)

Zu 2c,d)