Hausaufgaben 19.11.2008 HW1A

Lösungen:

1	Suchen Sie im Internet nach Extremwertaufgaben. Finden Sie mindestens drei Aufgaben, die Ihnen interessant und spannend erscheinen. Lösen Sie die Aufgabe selbst. Versuchen Sie die Lösung zu verstehen, wenn sie angegeben ist. Schreiben Sie Aufgabe und Lösungsweg auf.
2	Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussionen für folgende Funktionen durch. Zeichnen Sie die Funktionen a) $f(x) = 5x^3 + 4{,}5x^2 - 1{,}5x - 1$ L: $x_1 = -1$; $x_2 = -0{,}4$; $x_3 = 0{,}5$; $y_s = -1$; $f(x) = 5(x + 1)(x + 0{,}4)(x - 0{,}5)$ $f'(x) = 15x^2 + 9x - 1{,}5$ $f''(x) = 30x + 9$ P_{E1} (-0,7359; 0,5482); Max. P_{E2} (0,1359; -1,1082); Min. P_{W1} (-0,3; -0,28); Wendepunkt Keine Symmetrie. Steigend für (- ∞ ; -0,7359]; Fallend für (-0,7359; 0,1359]; Steigend für (0,1359; ∞); Rechtsgekrümmt für (-∞ ; -0,3]; Linksgekrümmt für (-0,3; ∞); $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 - \frac{34}{15}x^3 - \frac{34}{75}x^2 + \frac{74}{75}x - \frac{4}{25}$ L : $x_1 = -3;$ $x_2 = -1;$ $x_3 = \frac{1}{5};$ $x_4 = \frac{2}{5};$ $y_s = -\frac{4}{25};$ $f(x) = -\frac{2}{3}(x + 3)(x + 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right)$

	$f'(x) = -\frac{8}{3}x^3 - \frac{34}{5}x^2 - \frac{68}{75}x + \frac{74}{75}$ $f''(x) = -8x^2 - \frac{68}{5}x - \frac{68}{75}$ $P_{E1}(-2,3367;\ 4,1034)$; Max. $P_{E2}(-0,5186;\ -0,5257)$; Min. $P_{E3}(0,3053;\ 0,0287)$; Max. $P_{W1}(-1,6305;\ 2,1396)$; Wendepunkt $P_{W2}(-0,0695;\ -0,23)$; Wendepunkt Keine Symmetrie. Steigend für $(-\infty;\ -2,3367]$; Fallend für $(-2,3367;\ -0,5186]$; Steigend für $(-0,5186;\ 0,3053]$; Fallend für $(0,3053;\ \infty)$; Rechtsgekrümmt für $(-\infty;\ -1,6305]$; Linksgekrümmt für $(-1,6305;\ -0,0695]$; Rechtsgekrümmt für $(-0,0695;\ \infty)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$
3	Für Polynome gelten jeweils die folgenden Bedingungen. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen. Im Ergebnis kann auf vier Stellen gerundet werden. a) – Grad 4 – an der Nullstelle $\frac{1}{2}$ die Steigung 0 – schneidet die y – Achse bei 0 mit der Steigung 1 – an der Stelle $x = \frac{-1}{4}$ die Steigung $\frac{-4}{5}$ L : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$ $f'\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{-4}{5}$

$$\frac{1}{16}a + \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{2}d + e = 0$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b + c + d = 0$$

$$+ e = 0$$

$$+ d = 1$$

$$- - \tfrac{1}{16}a + \tfrac{3}{16}b - \tfrac{1}{2}c + d = -\tfrac{4}{5}$$

$a = \frac{182}{15}$;

$b = \frac{-122}{15}$;

$c = \frac{-29}{30}$;

$d = 1$;

$e = 0$;

$$f(x) = \tfrac{182}{15}x^4 - \tfrac{122}{15}x^3 - \tfrac{29}{30}x^2 + x$$

b) - Grad 4
- am Wendepunkt (-0,5; -0,5) die Steigung -4
- einen Sattelpunkt bei x = -1

L:
f (-0,5) = -0,5 ;
f' (-0,5) = -4 ;
f'' (-0,5) = 0
f' (-1) = 0 ;
f'' (-1) = 0

```
0,0625a - 0,125b + 0,25c - 0,5d + e  =  -0,5
 - 0,5a +  0,75b -      c +    d     =  -4
     3a -      3b +    2c            =  0
   - 4a +      3b -    2c +    d     =  0
    12a -      6b +    2c            =  0
```

a = 16 ; b = 48 ; c = 48 ; d = 16 ; e = 0,5 ;

$f(x) = 16x^4 + 48x^3 + 48x^2 + 16x + 0,5$

c) - Grad 4
- geht durch den Punkt (-0,4; -2)
- Extremwert am Punkt (0; 0)
- Extremwert am Punkt (1; 4)

L:
f (-0,4) = -2
f (0) = 0 ;
f' (0) = 0
f (1) = 4 ;
f' (1) = 0

$$
\begin{aligned}
0{,}0256a - 0{,}064b + 0{,}16c - 0{,}4d + e &= -2 \\
e &= 0 \\
d &= 0 \\
a + b + c + d + e &= 4 \\
4a + 3b + 2c + d &= 0
\end{aligned}
$$

a = -14,1327 ; b = 20,2653; c = -2,1327 ; d = 0 ; e = 0 ;

$f (x) = -14{,}1326530612245x^4 + 20{,}265306122449x^3 - 2{,}13265306122449x^2$

d) - Grad 4
- Sattelpunkt am Punkt (-0,2; 0,5)
- schneidet die y-Achse bei -0,2
- geht durch den Punkt (0,2; 0,2)

L:
f (-0,2) = 0,5 ;
f' (-0,2) = 0 ;
f'' (-0,2) = 0
f (0) = -0,2
f (0,2) = 0,2

$$
\begin{aligned}
0{,}0016a - 0{,}008b + 0{,}04c - 0{,}2d + e &= 0{,}5 \\
-0{,}032a + 0{,}12b - 0{,}4c + d &= 0 \\
0{,}48a - 1{,}2b + 2c &= 0 \\
e &= -0{,}2 \\
0{,}0016a + 0{,}008b + 0{,}04c + 0{,}2d + e &= 0{,}2
\end{aligned}
$$

a = 414,0625 ; b = 160,9375 ; c = -2,8125 ; d = -7,1875 ; e = -0,2 ;

$f(x) = 414{,}0625x^4 + 160{,}9375x^3 - 2{,}8125x^2 - 7{,}1875x - 0{,}2$

4 Wie erkennt man das Steigungsverhalten einer Funktion aus ihrer Ableitung?

Dort, wo die Ableitungsfunktion positiv ist, steigt die Stammfunktion.
Dort, wo die Ableitungsfunktion negativ ist, sinkt die Stammfunktion.

5

Gegeben sind jeweils Funktionen und Punkte: Bestimmen Sie das Steigungs- und Krümmungsverhalten der Funktionen an den genannten Punkten.

a) $f(x) = -x^4 + 9{,}4x^3 - 27{,}6x^2 + 25{,}6x - 6{,}4$
$x_1 = 2$
$x_2 = -1$

L:
$f'(x) = -4x^3 + 28{,}2x^2 - 55{,}2x + 25{,}6$
$f''(x) = -12x^2 + 56{,}4x - 55{,}2$

$f'(2) = -4$;	fallend;	$f''(2) = 9{,}6$;	linksgekrümmt;
$f'(-1) = 113$;	steigend;	$f''(-1) = -123{,}6$;	rechtsgekrümmt;

b) $f(x) = -2{,}5x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 9x + 4{,}5$
$x_1 = -0{,}6$
$x_2 = 4$

L:
$f'(x) = -10x^3 - 27x^2 - 4x + 9$
$f''(x) = -30x^2 - 54x - 4$

$f'(-0{,}6) = 3{,}84$;	steigend;	$f''(-0{,}6) = 17{,}6$;	linksgekrümmt;
$f'(4) = -1079$;	fallend;	$f''(4) = -700$;	rechtsgekrümmt;

c) $f(x) = -2x^4 - 3{,}8x^3 + 20x^2 + 9{,}8x - 12$
$x_1 = -1$
$x_2 = 2{,}5$

L:
$f'(x) = -8x^3 - 11{,}4x^2 + 40x + 9{,}8$
$f''(x) = -24x^2 - 22{,}8x + 40$

$f'(-1) = -33{,}6$;	fallend;	$f''(-1) = 38{,}8$;	linksgekrümmt;
$f'(2{,}5) = -86{,}45$;	fallend;	$f''(2{,}5) = -167$;	rechtsgekrümmt;

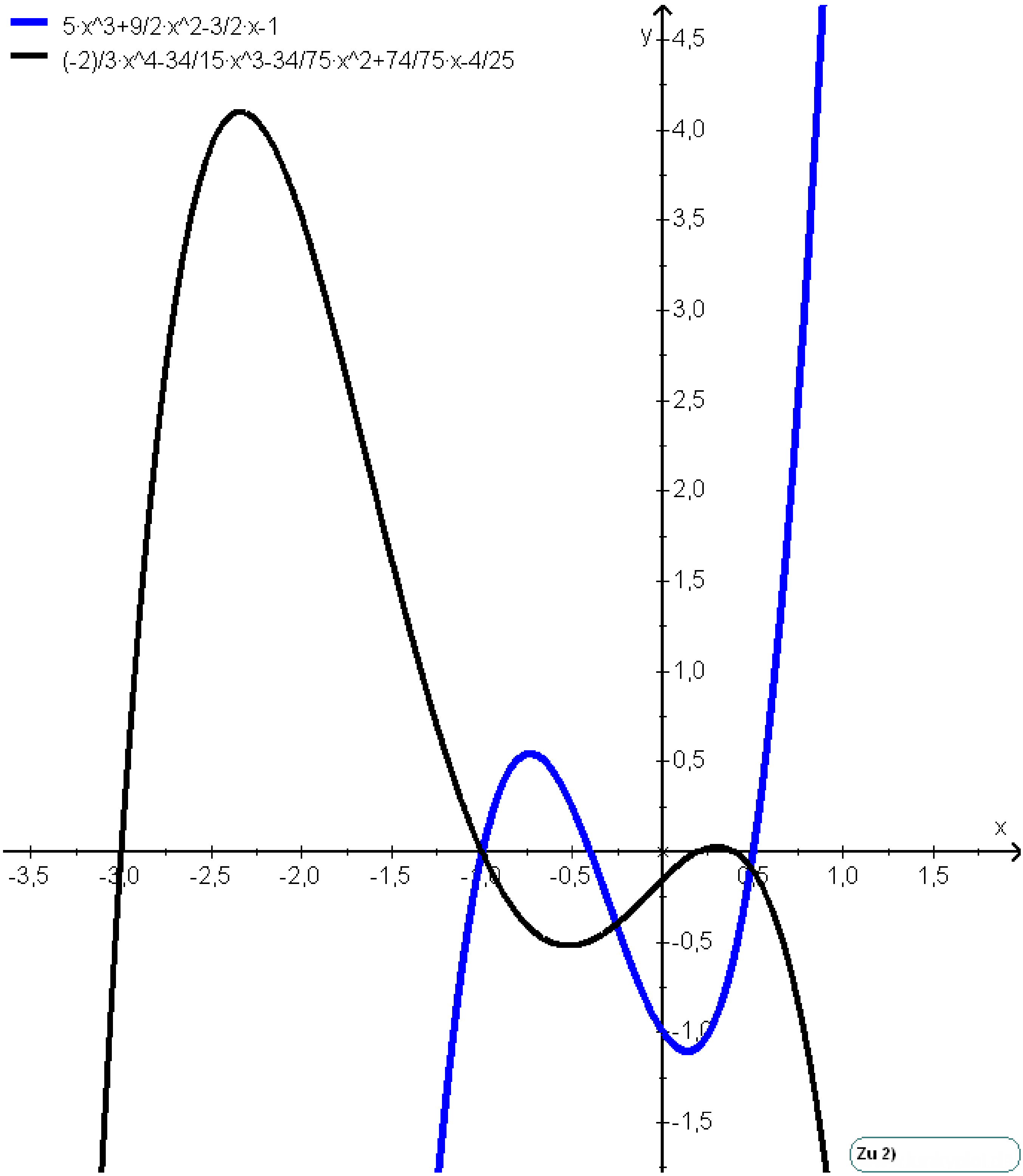
d) $f(x) = 0{,}6x^4 + 0{,}9x^3 - 4{,}5x^2 - 9{,}6x - 3{,}6$
$x_1 = 4$
$x_2 = -2$

L:
$f'(x) = 2{,}4x^3 + 2{,}7x^2 - 9x - 9{,}6$
$f''(x) = 7{,}2x^2 + 5{,}4x - 9$

$f'(4) = 151{,}2$;	steigend;	$f''(4) = 127{,}8$;	linksgekrümmt;
$f'(-2) = 0$;	Minimum	$f''(-2) = 9$;	linksgekrümmt;

6	Eine Firma stellt offene Komposttonnen für Kleingärtner her. Diese sollen bei festgelegtem Materialbedarf ein größtmögliches Fassungsvermögen haben. Wie sind die Abmessungen zu wählen, wenn für jede Tonne 2m² Material verbraucht werden kann? $r = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} = 0,46$ $h = 0,46$ $V_{max} = 0,3071$

Zu 2)


5·x^3+9/2·x^2-3/2·x-1
(-2)/3·x^4-34/15·x^3-34/75·x^2+74/75·x-4/25
y
x
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
-0,5
-1,0
-1,5
-3,5
-3,0
-2,5
-2,0
-1,5
-1,0
-0,5
0,5
1,0
1,5
Zu 2)